En resum, aquest text ve a curullar un dels desitjos més pregons que pot tenir tot matemàtic: poder copsar l'esperit d'Euclides d'una manera rigorosa per als temps actuals, però sense gaire esforç.

Joan Girbau
UAB

Stability by linearization of the Einstein's field equation

Autors: L. Bruna i J. Girbau
Editorial: Birkhaüser, «Progress in Mathematical Physics»

En tractar de globalitzar la seva teoria de la relativitat especial, és a dir, de fer cosmologia, A. Einstein hi incorporà la gravetat (associada a la matèria), mitjançant la idea que l'efecte d'un camp gravitatori sobre una partícula és exactament el mateix que el d'una acceleració de la mateixa respecte d'un sistema inercial, i que les trajectòries «lliures» havien de ser geodèsiques. Això el portà a definir la gravitació com una propietat de la mètrica en l'espai-temps, on l'evolució de la mateixa en reflexaria els canvis en la distribució de matèria. D'altra banda, considerà aquesta materia distribuïda a l'Univers com un fluid perfecte, i els punts en serien les galàxies.

Així, l'evolució de l'Univers es pot descriure mitjançant les solucions d'una equació entre tensors, anomenada *equació d'Einstein*,

$$\mathrm{Ric}(g) = \chi T,$$

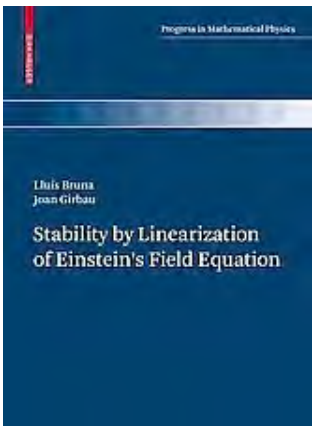
on g representa una mètrica, T és el tensor d'impulsió-energia, corresponent al tensor dels esforços (*stress tensor*) en un fluid perfecte, amb $\operatorname{div} T = 0$ que representa la matèria, i χ és una constant (la constant cosmològica).

En general, T també depèn de g de manera no lineal, i així, expressada en coordenades, l'equació anterior esdevé un sistema de deu10 equacions escalars, en derivades parcials, de segon ordre i no lineals, d'una gran complexitat.

Un procediment habitual en l'estudi dels fenòmens regits per aquest tipus d'equacions és el de la linealització: hom canvia a l'equació per la seva «diferencial», i obté així una equació lineal similar. Llavors hom considera les solucions de l'equació lineal com a aproximacions de les solucions de l'equació original. Al cas de l'equació d'Einstein aquest procés fa aparèixer un operador dalambertià, és a dir, que aquesta part lineal està relacionada amb l'operador de les ones (vectorial).

Sorgeix immediatament la qüestió de la validesa del mètode. En primer lloc hi ha les qüestions generals d'existència i unicitat de solucions de l'equació d'Einstein amb condicions inicials donades, i tot seguit el problema de l'estabilitat del procés de linealització, que clàssicament s'entén com que les solucions de l'equació d'Einstein s'aproximen en l'ordre 1 a les solucions de la linealitzada, diguem-ne així, per a un instant de temps donat, cosa que permet de formular el problema en termes d'estabilitat respecte de condicions de Cauchy.

Aquest problema ha rebut l'atenció de diversos autors, principalment a partir dels anys setanta del segle XX, com ara Y. Choquet-Bruhat i S. Dreser, A. Fischer i J. E. Marsden, V. Moncrief i d'altres, sempre en absència de matèria i molt al voltant del cas en què la mètrica inicial és la de Minkowskii o similar (en un cert sentit).



En tres articles publicats al tombant del segle XXI, els autors d'aquesta monografia contribuïren a resoldre el problema amb resultats per al cas en què hi ha matèria, és a dir, en què en l'equació d'Einstein, T no és nul. Com que la mètrica g també intervé en T com a va-

riable, començaren per revisar el concepte de linealització, amb una nova definició en què T és considerada també com a variable. Aquesta nova formulació els permeté d'estendre els resultats d'estabilitat, ja coneguts en el cas del buit, en el cas que hi ha matèria, amb condicions (naturals però tècniques) sobre el volum i regularitat de les dades de Cauchy. Finalment, a manera d'aplicació, estengueren els resultats al model cosmològic de Robertson i Walker (la restricció de la mètrica a l'espai té curvatura seccional constant, i els coeficients només depenen del temps), que és un model a la vegada prou simple i versàtil i per tant molt usat en els treballs de caire fenomenològic. En paraules dels autors, «...si interpretem l'univers amb un model de Robertson Walker amb mètrica $\tilde{g}$ i tensor d'impulsió energia T [...], l'explosió d'una supernova en una galàxia distant produirà una pertorbació en el tensor d'impulsió-energia inicial, T que revertirà en una pertorbació de la mètrica $\tilde{g}$, i així l'univers deixarà de respondre al model de Robertson i Walker [...] tanmateix cal saber si la linealització és (ara) admissible...».

El llibre en qüestió pretén ser un tractat autocontingut, en la mesura del possible en un tema extraordinàriament tècnic, del problema de la linealització de l'equació d'Einstein. Així comença amb dos capítols introductoris. Al primer hom fa una exposició completa i ben referenciada de la flora i fauna de les varietats pseudoriemannianes i al segon fa una exposició de la teoria de la relativitat, restringida i general, des de l'axiomàtica elemental fins als models cosmològics, amb èmfasi en l'equació d'Einstein i el model de Robertson Walker.

Al tercer capítol hom parla de la linealització de l'equació d'Einstein i la relació amb l'operador de les ones (dalembertià), que en representa el resultat, i molt usada quan es vol fer física fenomenològica.

Aquests capítols fan l'exposició accessible a un públic amb un cert grau de coneixements físics o matemàtics i fins i tot poden ser usats, amb les evidents completacions de material (algunes demostracions, etc.) com un curs bàsic de cosmologia (per a físics i matemàtics).

El capítol quart és força més tècnic i bàsicament està destinat a demostrar l'existència i unicitat (llevat de difeomorfismes que no alteren les condicions inicials ni la direcció de propagació de les mateixes) del problema de Cauchy per a l'equació d'Einstein. Aquest resultat representa, de fet, una reducció que permet de pensar en la restricció a una subvarietat convenient (del tipus espai) d'una solució de l'equació, per comptes de pensar en la solució mateixa, cosa que representa un bon estalvi tècnic i conceptual.

Aquesta és la part general i introductòria de l'exposició. Cal dir que tant el tercer com el quart capítols tenen un caràcter més avançat i contenen les demostracions de pràcticament tots els resultats exposats.

La resta del llibre està dedicada a l'estudi de l'estabilitat per linealització de les dades de Cauchy, és a dir, parells g, T donats a una subvarietat, amb condicions de lligadura. Consisteix en una revisió del concepte d'estabilitat, seguit d'una generalització en el cas en què hi ha matèria, dels resultats d'altres autors abans esmentats i també d'altres resultats obtinguts pels autors del llibre.

La presentació i discussió dels conceptes d'estabilitat per linealització (clàssic i nou) es fa al capítol cinquè, on també s'hi estudien diverses propietats i objectes matemàtics associats.

Els capítols següents estan dedicats a demostrar resultats d'estabilitat per linealització, entesa segons el nou concepte, de les dades de Cauchy, estenent els d'altres autors al cas $T \neq 0$, i presentant-ne de propis.

El capítol sisè conté els teoremes de A. Fischer i J. E. Marsden, i de V. Moncrief, que fan referència al cas en què, en absència de matèria, les dades de Cauchy són donades en una varietat compacta.

Finalment, els dos darrers capítos detallen la contribució dels autors.

El capítol setè conté la generalització dels treballs d'Y. Choquet-Bruhat i S. Dreser, quan les dades de Cauchy són la mètrica de Minkowskii i absència de matèria, sobre una varietat no compacta, i dels d'Y. Choquet-Bruhat, A. Fischer i J. E. Marsden, per a mètriques generals que coincideixen amb la de Minkowskii a l'infinit, en el cas que $T \neq 0$.

El capítol vuitè és més aplicat i conté l'estudi, en termes de la geometria i topologia de la varietat de base, de l'estabilitat per linealització del model cosmològic de Robertson i Walker.

El caràcter dels darrers quatre capítols del llibre és força tècnic i s'hi inclouen desenvolupaments i resultats de temes de l'anàlisi funcional clàssica d'operadors, d'espais de Sobolev,

d'equacions en derivades parcials, d'operadors el·líptics, en diverses situacions no estàndards i que no permeten el recurs directe de la citació. Alguns d'aquests resultats, de J. Bruna, i els autors d'aquest llibre, han donat lloc a sengles publicacions.

Finalment, quelcom d'especialment agraït és el grau de completesa matemàtica del text, l'elecció de la bibliografia i els comentaris sobre la mateixa que en fan els autors, en un àmbit que sovint és una selva de publicacions i resultats.

Recomanem molt la lectura total o parcial del llibre, tant pel contingut com pels mètodes emprats, a matemàtics, físics, i altres persones interessades en l'aplicació de les matemàtiques a la descripció del que percebem com a realitat.

Josep M. Burgués
UAB

Racó biogràfic

Fèlix Hausdorff (Breslau, 8.11.1868–Bonn, 26.12.1942)

La primera vegada que vaig sentir la paraula «Hausdorff» va ser a començaments del 1970: «...i com que l'espai és Hausdorff existiran entorns tals que...». Al llarg de la carrera de matemàtiques van sortir molts altres noms (Weierstras, Taylor, Christoffel, Noether, Banach, Rolle, Stokes, Fubini, Wronski, l'Hôpital, Riemann, Cauchy, Schwarz, Klein, Sylow, Bolzano, Zorn, Kronecker, Borel, etc.), però tots plegats no eren més que índexs que servien per citar teoremes, lemes, fórmules, desigualtats, espais, grups, anells, símbols, botelles, integrals, etc. Quasi mai no es deia res de les persones que hi havia al darrere.

Després, amb el temps, he descobert i segueixo descobrint les diferents personalitats matemàtiques i els diferents entorns històrics que hi ha al darrere d'aquests noms índex, i no deixen de sorprendre'm les coses que en llegeixo. Certament molts d'ells podrien esdevenir bons arguments per a novel·les i pel·lícules i, recentment, ja n'hi ha hagut alguns exemples (amb més o menys encert).

El dia que vaig voler saber què hi havia darrere l'índex Hausdorff, aquell nom que em permetia separar punts amb entorns convenients, aquell dia em vaig sentir ple de tristesa i d'indignació, aquell dia vaig saber que Hausdorff es deia Fèlix i que Fèlix Hausdorff havia estat una víctima més del nazisme: el 26 de gener de 1942, Fèlix Hausdorff, juntament amb la seva esposa Charlotte i la germana de Charlotte, van decidir suïcidar-se davant la imminent deportació a un camp d'extermini. Fèlix Hausdorff, aquell home que havia exercit de professor de matemàtiques a les universitats de Leipzig, Bonn i Greifswald i que havia escrit matemàtiques, astronomia, filosofia, assaigs culturals, música, poesia i teatre; creador d'alta matemàtica (axiomàtica d'espai topològic per via d'entorns, mesura i dimensió de Hausdorff, hipòtesi del continu generalitzada, principi maximal de Hausdorff, paradoxa de l'esfera, etc.), aquell home havia de ser exterminat pel simple fet de ser jueu.

Obra completa

L'any 1992, a partir d'uns actes celebrats a Bonn per commemorar el cinquantenari de la mort de Fèlix Hausdorff, es va iniciar un projecte per a la recuperació, organització i publicació de tota la seva obra. Aquest projecte, que ja ha donat fruit amb la publicació de sis dels nou volums en projecte, l'està duent a terme un grup interdisciplinari procedent de diversos països europeus (Alemanya, Suïssa, Rússia, República Txeca i Àustria) i el formen setze matemàtics, quatre historiadors de la matemàtica, dos literats, un filòsof i un astrònom. Els títols d'aquests nou volums són els següents:

Vol. 1. *Biographie. Hausdorff als akademischer Lehrer. Arbeiten über geordnete mengen [Biografia. Hausdorff com a professor. Treballs sobre conjunts ordenats].*

Vol. 2. *Grundzüge der Mengenlehre (1914) [Principis de la teoria de conjunts].*

Vol. 3. *Mengenlehre (1927, 1935). Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre und Topologie [Teoria*